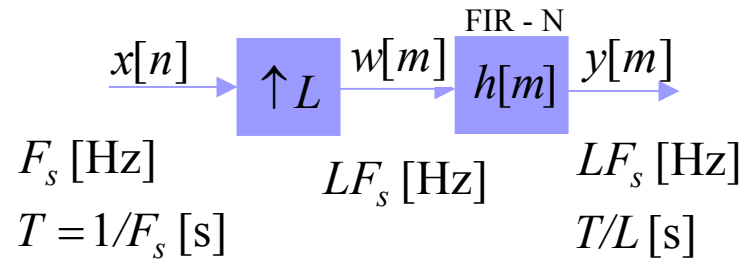


Interpolacja i decymacja

Interpolacja – zagęszczanie ciągu próbek (sygnału dyskretnego). Krotność interpolacji: L – liczba całkowita. Przepróbkowanie z szybkości $F_s = 1/T$ do $LF_s = L/T$.

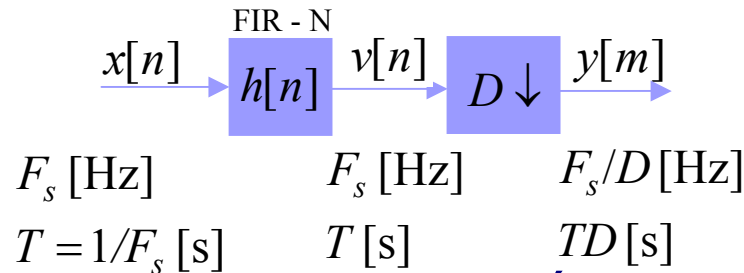
Decymacja – rozrzedzanie ciągu próbek (sygnału dyskretnego). Krotność decymacji: D – liczba całkowita. Przepróbkowanie z szybkości $F_s = 1/T$ do $F_s / D = 1/DT$.

Koncepcja interpolacji: kaskada ekspandera i filtru $1/L$ -pasmowego.



Ekspander uzupełnia ciąg wejściowy zerami. Wstawia $L-1$ zer pomiędzy każdą parę próbek danych.

Koncepcja decymacji: kaskada filtru $1/D$ -pasmowego i kompresora.



Kompresor pozostawia jedynie co D -tą próbkę z ciągu na wyjściu filtru $1/D$ - pasmowego.

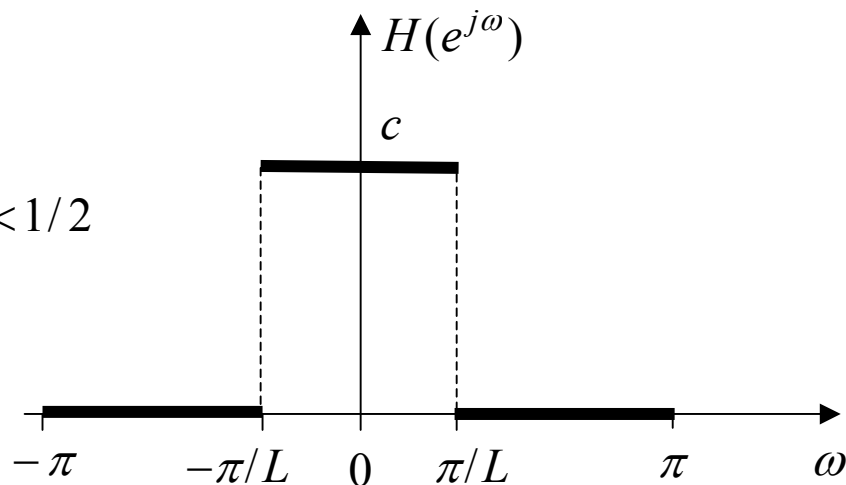
Na obu schematach filtr – zwykle FIR o długości N pracuje z większą z dwóch szybkości próbkowania.

Filtr interpolacyjny $1/L$ – pasmowy idealny: filtr dolnoprzepustowy, zero-fazowy.

$$H(e^{j\omega}) \triangleq \begin{cases} c, & |\omega| < \pi/L \text{ lub } |f| < 1/(2L) \\ 0, & \pi/L < |\omega| < \pi \text{ lub } 1/(2L) < |f| < 1/2 \end{cases}$$

gdzie

$$\omega \in (-\pi, \pi), \quad f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad f \in (-1/2, 1/2)$$



Odpowiedź impulsowa idealna, określona dla $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned} h[n] &= \text{IDTFT}\{H(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} c e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{c}{2\pi} \left[\frac{1}{jn} (e^{j\pi n/L} - e^{-j\pi n/L}) \right] = \frac{c}{\pi n} \sin(\pi n/L) = \frac{c}{L} \frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n/L} = \frac{c}{L} \text{sinc}(n/L) \end{aligned}$$

Interpolacja: $c=L$.
Decymacja: $c=1$.

$$\text{Uwaga! } \text{sinc}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Warunek Nyquista bezbłędneho odtworzenia (przeniesienia przez filtr) próbek wejściowych (występujących w węzłach interpolacji) to

$$h[Ln] = \frac{c}{L} \delta[n], \quad \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \text{ delta Kroneckera}$$

W praktyce filtr idealny $1/L$ – pasmowy (nierealizowalny fizycznie) zastępuje się jego realizowalnym odpowiednikiem FIR – N. Oprócz tego zapewnia się pracę filtru interpolacyjnego i/lub decymacyjnego z mniejszą z dwóch szybkości próbkowania, za pomocą dekompozycji odpowiedzi impulsowej.

Dekompozycja wielofazowa

W tym celu dobiera się długość N FIR-filtru $H_N(z) \Leftrightarrow h_N[n]$ $1/L$ - pasmowego $N=LM$, gdzie L - krotność interpolacji (lub decymacji), a M - liczba też całkowita. Wówczas

$$H_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_N[n] z^{-n}$$

dekomponuje się następująco

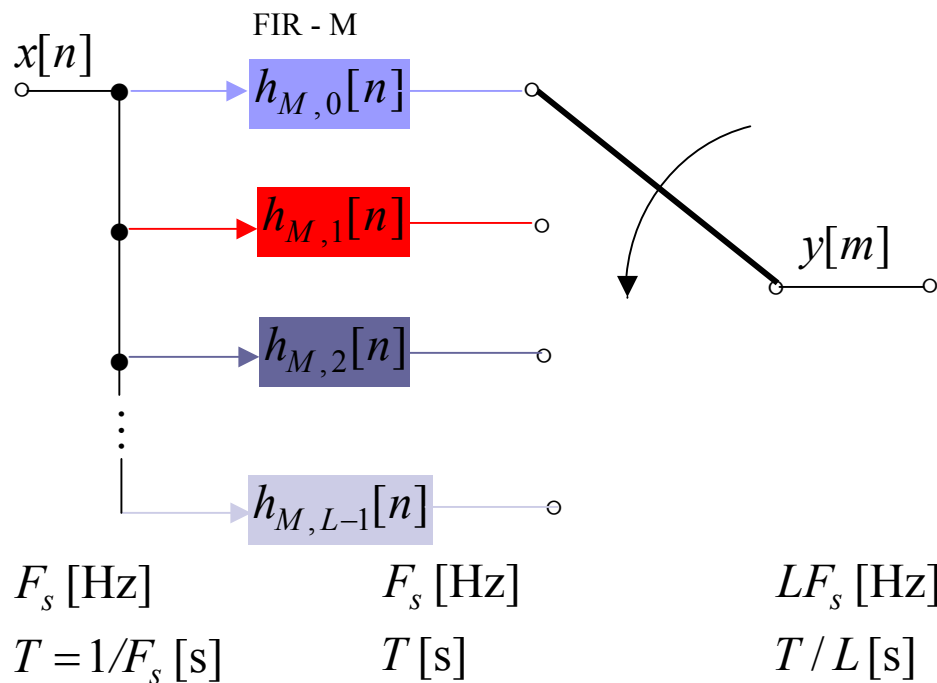
$$H_N(z) = \sum_{l=0}^{L-1} z^{-l} H_{M,l}(z^L), \quad h_{M,l}[n] \Leftrightarrow H_{M,l}(z^L)$$

przy czym odpowiedzi impulsowe pod-filtrów wielofazowych

$$h_{M,l}[n] = h_N[nL + l], \quad n = 0, 1, \dots, M-1, \quad l = 0, 1, \dots, L-1$$

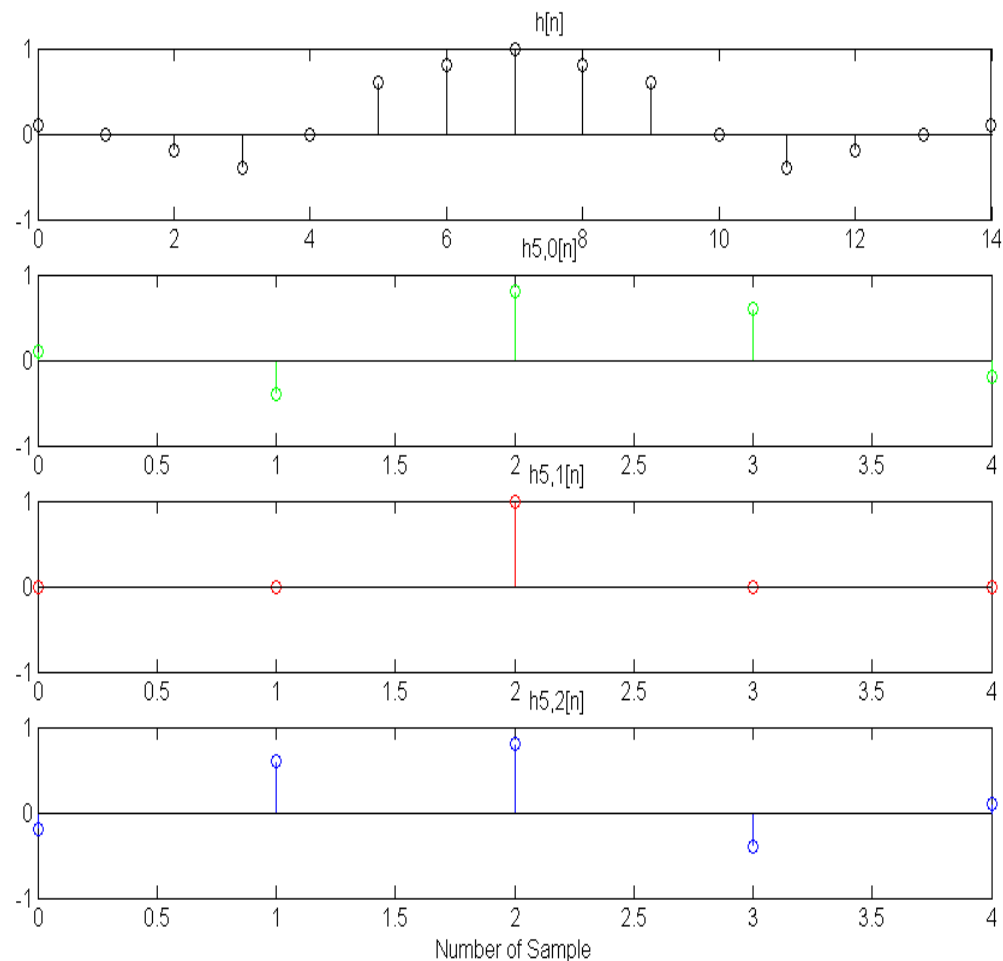
Wynika stąd stosowany w praktyce model komutatorowy filtru interpolacyjnego.

Model komutatorowy filtru interpolacyjnego o krotności interpolacji L

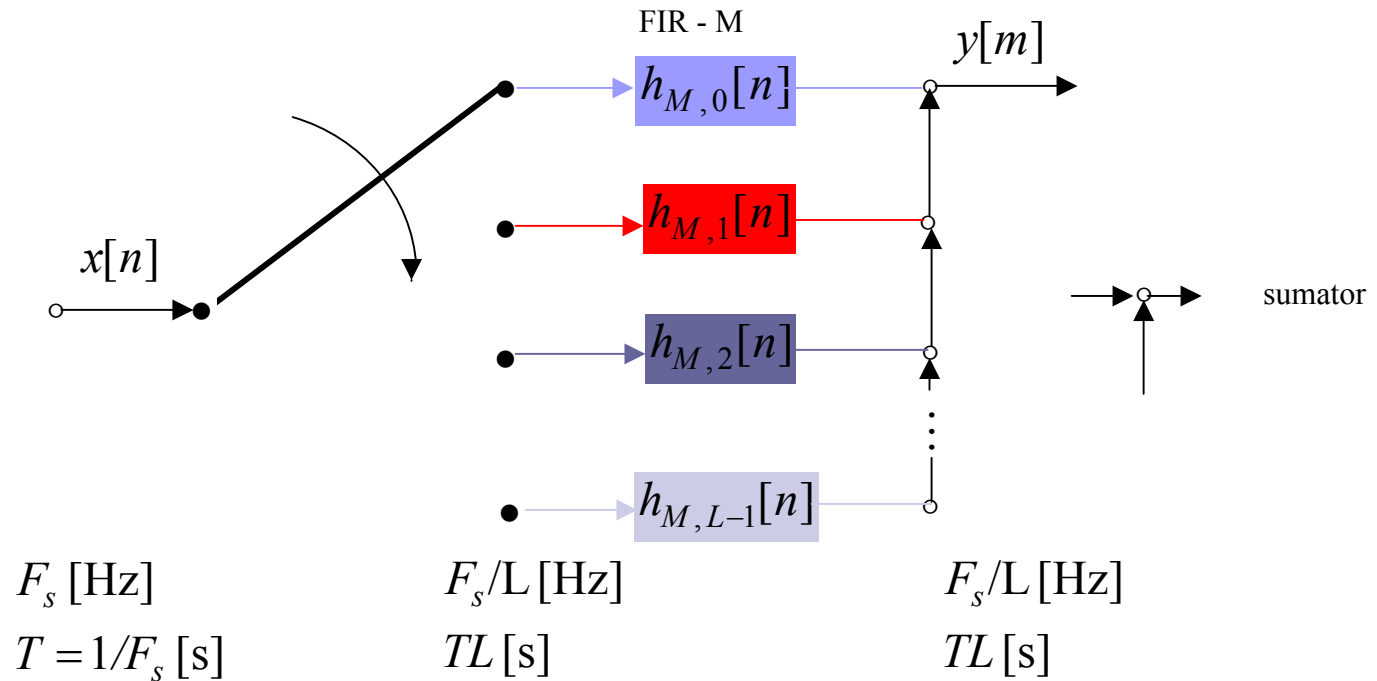


Pod-filtry można zrealizować np. w strukturze transwersalnej

Przykład dekompozycji 3-fazowej odpowiedzi impulsowej $h[n]$ interpolatora o długości $N=15$, z krotnością interpolacji $L=3$, na 3 pod-filtry: $h_{5,0}[n]$, $h_{5,1}[n]$ i $h_{5,2}[n]$, o długości $M=5$ każdy, do realizacji w modelu komutatorowym. Model o 3 gałęziach.



Model komutatorowy filtra decymacyjnego o krotności decymacji $D=L$



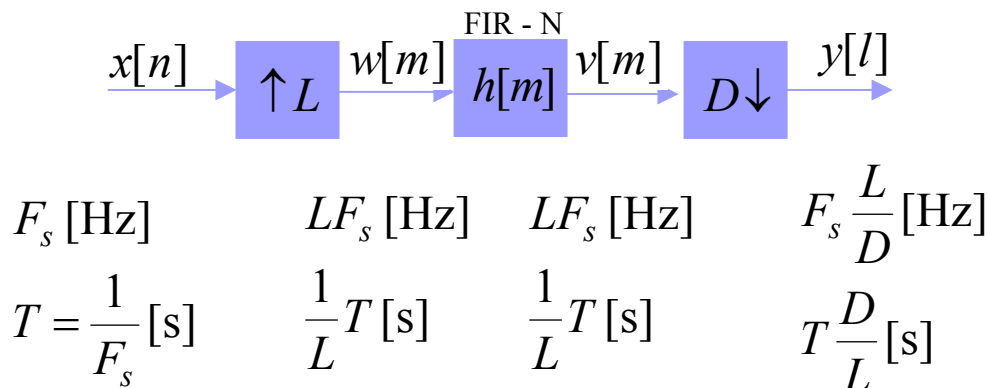
Zmiana szybkości próbkowania w stosunku wymiernym L/D

Kaskada ekspandera, filtru i kompresora.

Filtr idealny

$$H(e^{j\omega}) \triangleq \begin{cases} L, & |\omega| < \min\left(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{D}\right) \\ 0, & \min\left(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{D}\right) < |\omega| < \pi \end{cases}$$

spełniać ma ostrzejsze z wymagań.



Przykład projektowania filtru interpolacyjnego lub decymacyjnego (dla $D=L$ to taki sam filtr)

1. Zapisz charakterystykę częstotliwościową filtru idealnego.
2. Oblicz odpowiedź impulsową $h[n]$ tego filtru za pomocą IDTFT.
3. Przyjmij N nieparzyste podzielne przez L .
4. Przesuń $h[n]$ w prawo o $(N-1)/2$ odstępów próbkowania:
 $h[n] := h[n - (N-1)/2]$.
5. Pomnóż $h[n]$ przez okno $w[n]$ o długości N , próbka po próbce.

Przykładowe okno: von Hanna

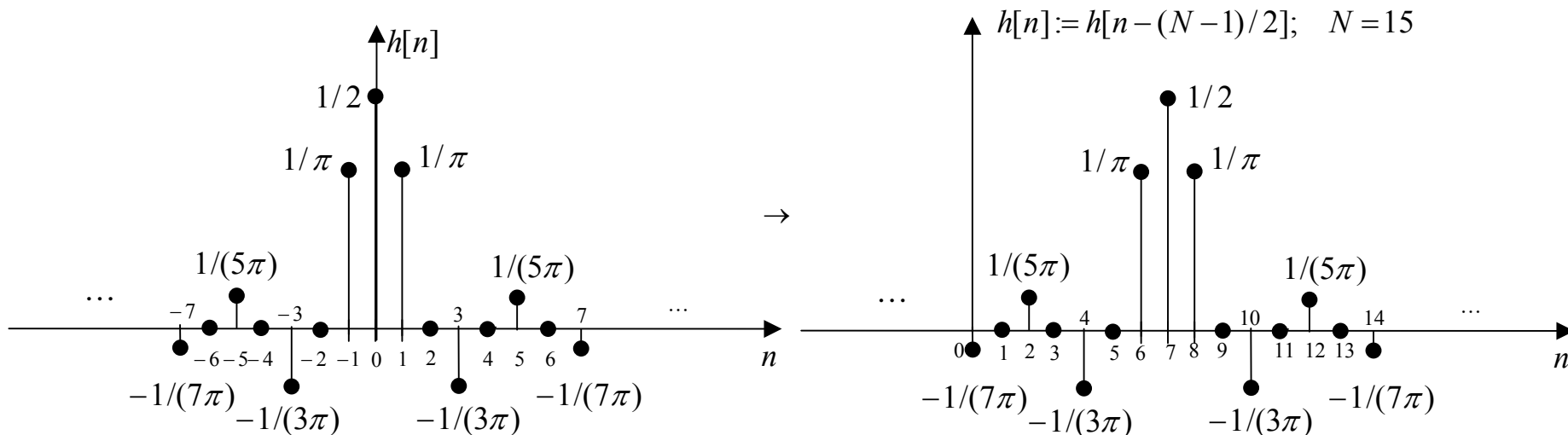
$$w[n] = 0.5 - 0.5 \cos \left[\frac{2\pi}{N-1} \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

A więc docelowy filtr, do dekompozycji wielofazowej, ma odpowiedź impulsową

$$h_N[n] = h[n]w[n] = h[n] \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left[\frac{2\pi}{N-1} \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right] \right\}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Ad.4 Przesuń $h[n]$ w prawo o $(N-1)/2$ odstępów próbkowania: $h[n] := h[n - (N-1)/2]$.

Przykładowo operacja przesunięcia dla $N=15$ – tu filtr pół-pasmowy



Zastosowania interpolacji i decymacji

1. Synchronizacja modemów odbiorników cyfrowych.
2. Estymacja kierunku, z którego przyszedł sygnał, w szyskach antenowych, celem uzyskania synfazowości sygnałów z poszczególnych elementów (anten) odbiorczych.
3. Konwersja szybkości próbkowania do realizacji współpracy systemów cyfrowych o różnych szybkościach próbkowania, np. pomiędzy standardami: telekomunikacyjnym i multimedialnym.
4. Fenomenologiczne modelowanie cyfrowe instrumentów muzycznych.
5. Estymacja opóźnienia np. w GPS. Pomiar czasu propagacji sygnału do/od satelitów metodą kompensacji opóźnienia ułamkowego.
6. Projektowanie karoserii samochodowych.
7. Usuwanie ech.
8. Przestrzajanie generatorów sterowanych numerycznie – DDS.
9. Dopasowanie obrazu do wielkości ekranu – przepróbkowanie sygnałów wizyjnych.
10. Lokalizacja obiektów, np. hełm wirtualnej rzeczywistości. I wiele innych.