Fraktale

Plan prezentacji

- Wprowadzenie
- Cechy charakterystyczne fraktali
- Zastosowanie fraktali
- Wymiar fraktalny *D*
- Klasyczne fraktale
- Iteracyjny system funkcji (IFS)
- *L-system*
- Zbiory Julii i Mandelbrota
- Ruchy Browna
- Wirtualna rzeczywistość

Wprowadzenie

- Fraktale są formami geometrycznymi, zawartymi w dziale matematyki, który opisuje i analizuje nieregularności oraz złożoność struktur rzeczywistego świata.
- Twórcą i odkrywcą tej geometrii jest, urodzony w 1924 roku w Warszawie, Benoit Mandelbrot.
- Nazwa fraktale pochodzi od łacińskiego *frangere* – łamać.
- Matematyka definiuje fraktale jako zwarte podzbiory topologicznej przestrzeni metrycznej S, charakteryzowane przez wymiar fraktalny D i miarę fraktalną μ.

Cechy charakterystyczne fraktali

- Samopodobieństwo
- Symetria
- Wymiar fraktalny nie jest liczbą całkowitą
- Brak jednoznacznego kształtu
- Nie są określone wzorem matematycznym, tylko zależnością rekurencyjną

Zastosowanie fraktali

- Badania nieregularności fraktali
- Opis procesów chaotycznych zachodzących w układach dynamicznych
- Przetwarzanie i kodowanie obrazów cyfrowych – kompresja fraktalna
- Modelowanie tworów naturalnych dla celów realistycznej grafiki komputerowej
- Badanie struktury łańcuchów DNA
- Badanie samopodobnych struktur harmonicznych występujących w muzyce

Wymiar fraktalny *D*

- Wymiar fraktalny Hausdorfa-Besicovitcha *D* jest miarą chropowatości i nie musi być liczbą całkowitą.
- Wymiarem Hausdorffa-Besicovitcha *D(F)* zbioru *F* nazywa się taką liczbę d_0, dla której granica $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(d_0, \varepsilon)$ ma wartość skończoną i różną od zera,

przy czym $$\alpha(d,\varepsilon) = \inf\left\{ m : B \in \beta^{\varepsilon} \wedge m = \sum_{A \in B} (diamA)^d \right\},$$

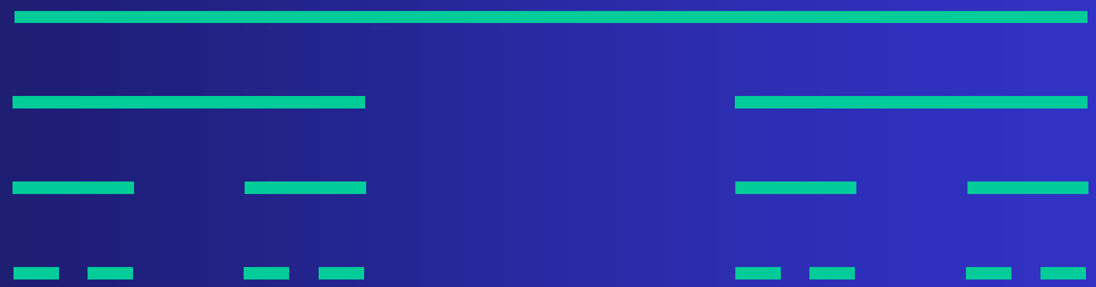
inf oznacza kres dolny, zaś *diam A* średnicę kuli *A*.
B oznacza rodzinę kul potrzebnych do pokrycia danego zbioru *F*.
Symbol β oznacza zbiór, którego elementami są wszystkie możliwe rodziny kul *B*.
β^{ε} oznacza podzbiór zbioru β zawierający rodziny kul, w których skład wchodzą kule o średnicy nie większej niż ε.
Symbol *d* oznacza pojemność (wymiar pojemnościowy) obiektu geometrycznego.

Klasyczne fraktale

- Zbiór (kurz) Cantora

Każdy odcinek domknięty dzieli się na trzy równe części i usuwa się z niego część środkową bez jej brzegów.

Zbiór ten składa się z nieprzeliczalnej ilości rozłącznych punktów i ma długość równą zero.



Klasyczne fraktale

- Trójkąt Sierpińskiego

  Każdy trójkąt równoboczny jest dzielony na cztery mniejsze, a następnie usuwany jest środkowy trójkąt.

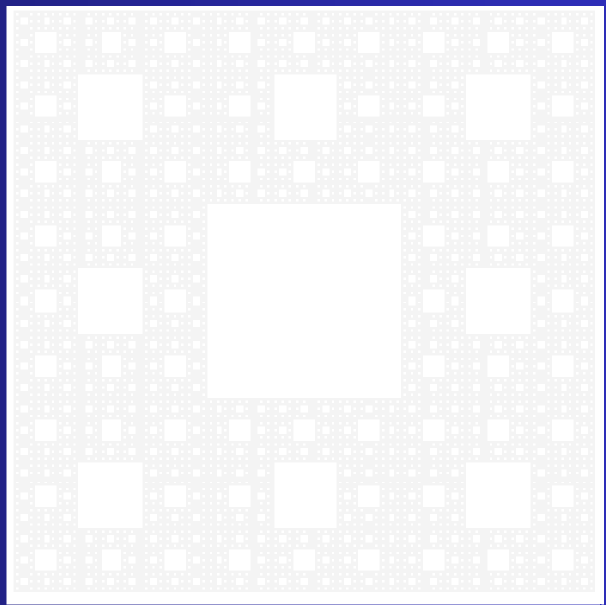
  Jego pole powierzchni jest równe 0.

Klasyczne fraktale

- Dywan Sierpińskiego

  Każdy kwadrat dzieli się na dziewięć jednakowych kwadratów, a następnie usuwa się kwadrat znajdujący się w środku.

  Pole powierzchnie dywanu Sierpińskiego jest równe 0.

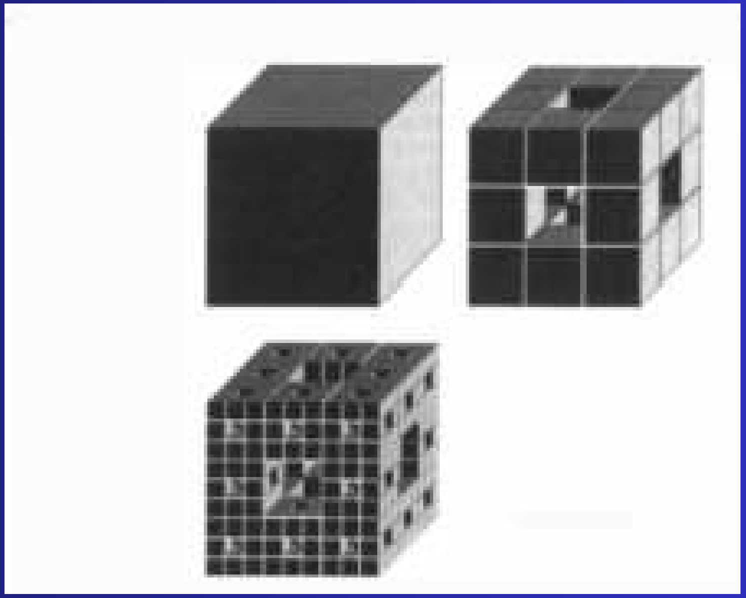


Klasyczne fraktale

- Kostka (gąbka) Mengera

  Jest to trójwymiarowa wersja dywanu Sierpińskiego.

  Ściany dowolnego sześcianu dzieli się na 9 kwadratów przystających. Następnie wiercone są dziury o przekroju kwadratowym, zaczynając od środkowego kwadratu, na wylot, do środkowego kwadratu na przeciwnej ścianie. Objętość kostki jest równa 0.

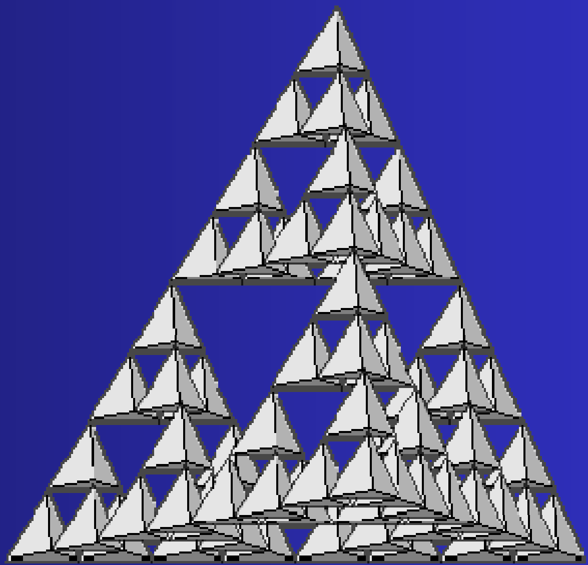


Klasyczne fraktale

- Piramida Sierpińskiego

  Piramida jest trójwymiarową wersją trójkąta Sierpińskiego. Odcinkami łączy się środki krawędzi czworościanu. Następnie usuwa się bryłę, której krawędziami są te odcinki.

  Objętość piramidy jest równa 0.



Klasyczne fraktale

- Krzywa Kocha

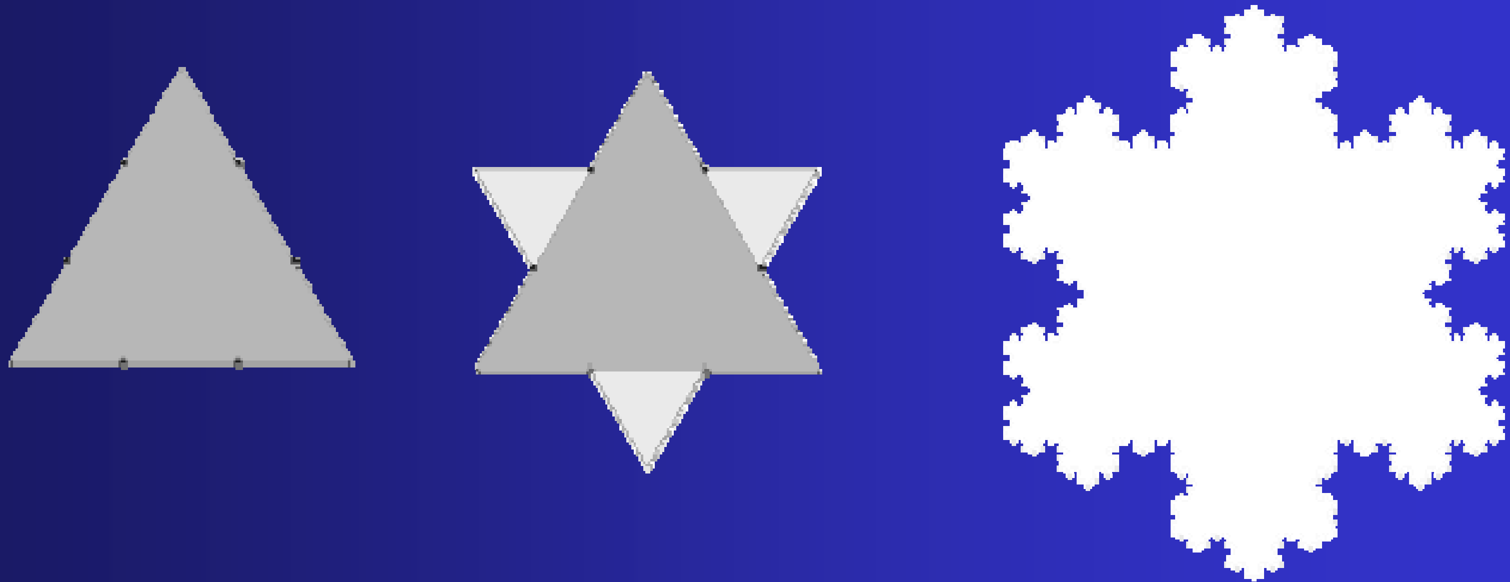
  Krzywa ta powstaje z podzielenia jednostkowego odcinka na trzy równe części. Środkowa część zostaje zastąpiona przez dwa z czterech odcinków, które tworzą tą krzywą.

  Krzywa ta ma nieskończoną długość.

Klasyczne fraktale

- Płatek Kocha

Figura, której brzegiem jest krzywa Kocha, nazywana jest płatkiem Kocha. W pierwszym kroku rysuje się trójkąt równoboczny o długości boku np. 1. Każdy bok trójkąta dzielony jest na trzy równe części. Następnie dokleja się do części środkowej trójkąt równoboczny o boku trzy razy krótszym.



Iteracyjny system funkcji (IFS)

- Definicja IFS (*Iterated Function System*):

Niech w oznacza odwzorowanie zwężające przestrzeń (X, ρ) w siebie.

Układem (systemem) iterowanych odwzorowań nazywa się zbiór k odwzorowań zwężających w_i ($i=1, 2, 3,...,k$), który oznacza się przez

$$\{X; w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}.$$

Przekształceniem w_k jest przekształcenie afiniczne, takie jak przesunięcie, obrót lub skalowanie.

Iteracyjny system funkcji (IFS)

- Z uwagi na powolne działanie algorytmu (IFS) często stosuje się algorytm probabilistyczny (IFSP).
- Pierwszym krokiem przy tworzeniu układu odwzorowań, jest przyjęcie za początkowy kształt dowolnej prostej figury, takiej jak odcinek czy kwadrat, i poszukanie odpowiednich transformacji, którym należy ją poddać, by w iteracyjnym procesie odwzorowywania przekształcić ją do wymaganego kształtu.
- Ważna jest kolejność wykonywania przekształceń – najpierw wykonuje się skalowanie, następnie obrót i na końcu translacje.

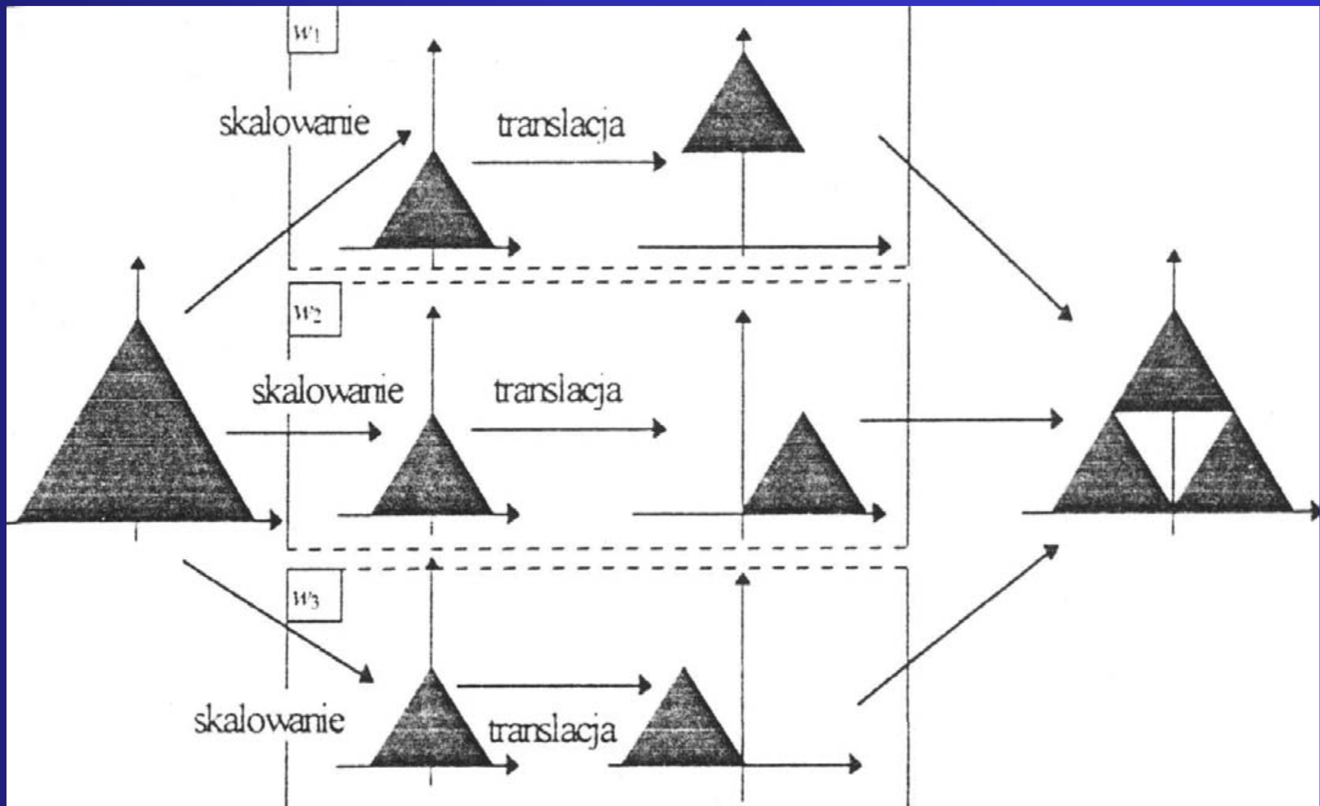
Iteracyjny system funkcji (IFS)

- Tworzenie trójkąta Sierpińskiego w oparciu o układy iterowanych odwzorowań.

$w_1 : \delta_1=\delta_2=1/2;$
$w_2 : \delta_1=\delta_2=1/2;$
$w_3 : \delta_1=\delta_2=1/2;$

$\varphi_1=\varphi_2=0;$
$\varphi_1=\varphi_2=0;$
$\varphi_1=\varphi_2=0;$

$t_1=0,\ t_2=\sqrt{3/4};$
$t_1=1/4,\ t_2=0;$
$t_1=-1/4,\ t_2=0.$

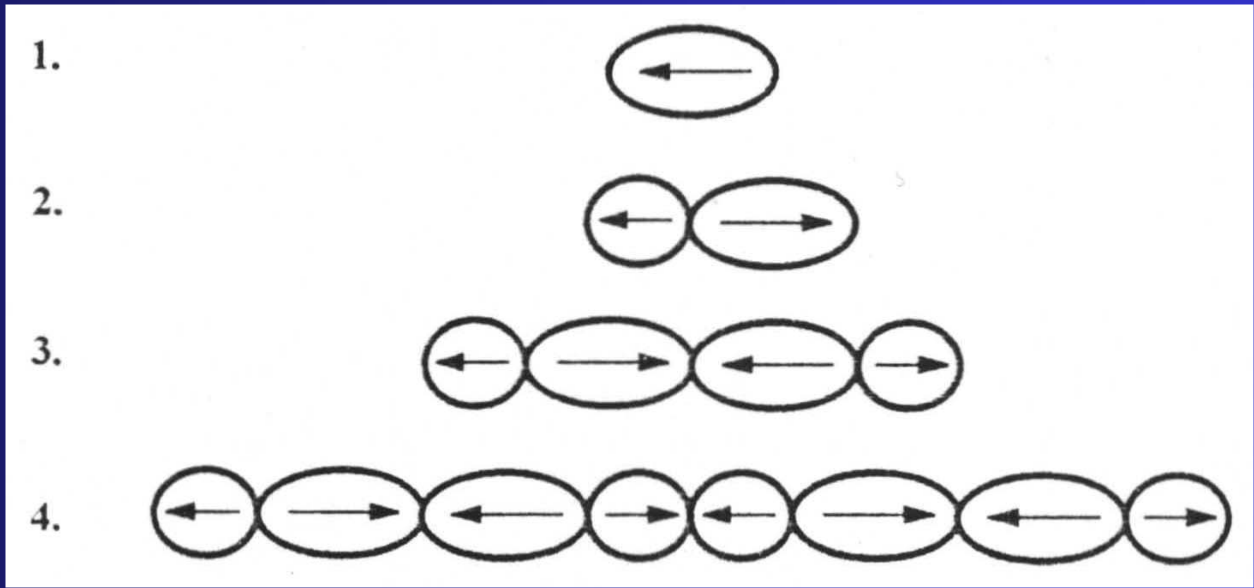


L - System

- Biolodzy definiują kształt danego organizmu jako pewną funkcję czasu.
- *L-system* jest formalnym językiem opisu wzrostu roślin wprowadzonym w 1968 roku przez Aristida Lindenmayera.
- Rośliny podzielone zostały na dwie klasy: proste, tzn. składające się z łańcucha komórek, i rozgałęzione.
- *L-system* scharakteryzowany jest poprzez aksjomat oraz reguły.

L - System

Kolejne kroki podziałów komórkowych glonu *anabaena catenula*.



Jeśli podziałowi ulega komórka, której powstanie spowodowało rozrost w kierunku lewym (prawym), wówczas jej potomkami będą: mała komórka powodująca rozrost w lewo (prawo) oraz większa komórka powodująca rozrost w prawo (lewo).

L - System

Przyjąć można następujące oznaczenia dla podlegających podziałowi komórek glonu:

$\overleftarrow{A}$ - mała komórka powodująca rozwój w lewo,
$\overrightarrow{A}$ - mała, powodująca rozwój w prawo,
$\overleftarrow{B}$ - duża, przyczyniająca się do rozwoju w lewo oraz
$\overrightarrow{B}$ - duża przyczyniająca się do rozwoju w prawo.
$\rightarrow$ oznacza relację podziału komórki.

Podziałami komórek glonu rządzą następujące reguły:

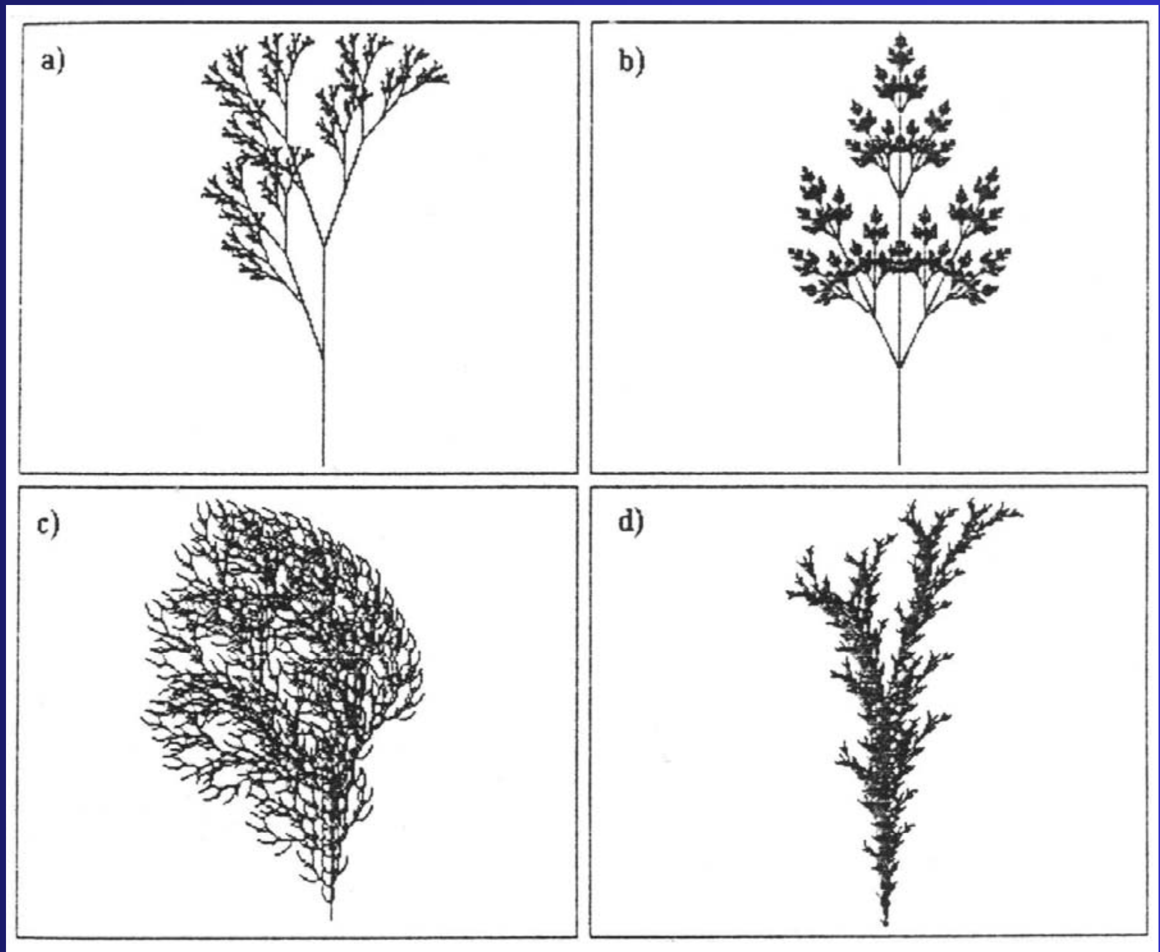
$$\overleftarrow{A} \rightarrow \overleftarrow{A}\overrightarrow{B}, \qquad \overrightarrow{A} \rightarrow \overleftarrow{B}\overrightarrow{A}, \qquad \overleftarrow{B} \rightarrow \overleftarrow{A}\overrightarrow{B}, \qquad \overrightarrow{B} \rightarrow \overleftarrow{B}\overrightarrow{A}.$$

Jeżeli aksjomatem (pierwszą z istniejących komórek) będzie $\overleftarrow{A}$, to w kolejnych podziałach powstaną następujące łańcuchy komórek:

$$\overleftarrow{B}\overrightarrow{A}, \qquad \overleftarrow{A}\overrightarrow{B}\overleftarrow{B}\overrightarrow{A}, \qquad \overleftarrow{A}\overrightarrow{B}\overleftarrow{B}\overrightarrow{A}\overleftarrow{A}\overrightarrow{B}\overleftarrow{B}\overrightarrow{A}, \qquad \overleftarrow{A}\overrightarrow{B}\overleftarrow{B}\overrightarrow{A}\overleftarrow{A}\overrightarrow{B}\overleftarrow{B}\overrightarrow{A}\overleftarrow{A}\overrightarrow{B}\overleftarrow{B}\overrightarrow{A}\overleftarrow{A}\overrightarrow{B}\overleftarrow{B}\overrightarrow{A}.$$

L - System

Przykłady roślinnych struktur rozgałęzionych.



Zbiory Julii i Mandelbrota

- Zbiory są wynikiem badań prowadzonych w latach 1918-1920 przez francuskich matematyków Pierre Fatou i Gaston Julia nad odwzorowaniami wymiernymi płaszczyzny zespolonej.
- *Zbiorem Julii $J(W_c)$* nazywa się brzeg zbioru przyciągania $U \in \overline{C}$ punktu stałego $z^* = \infty$ odwzorowania wymiernego W_c, czyli

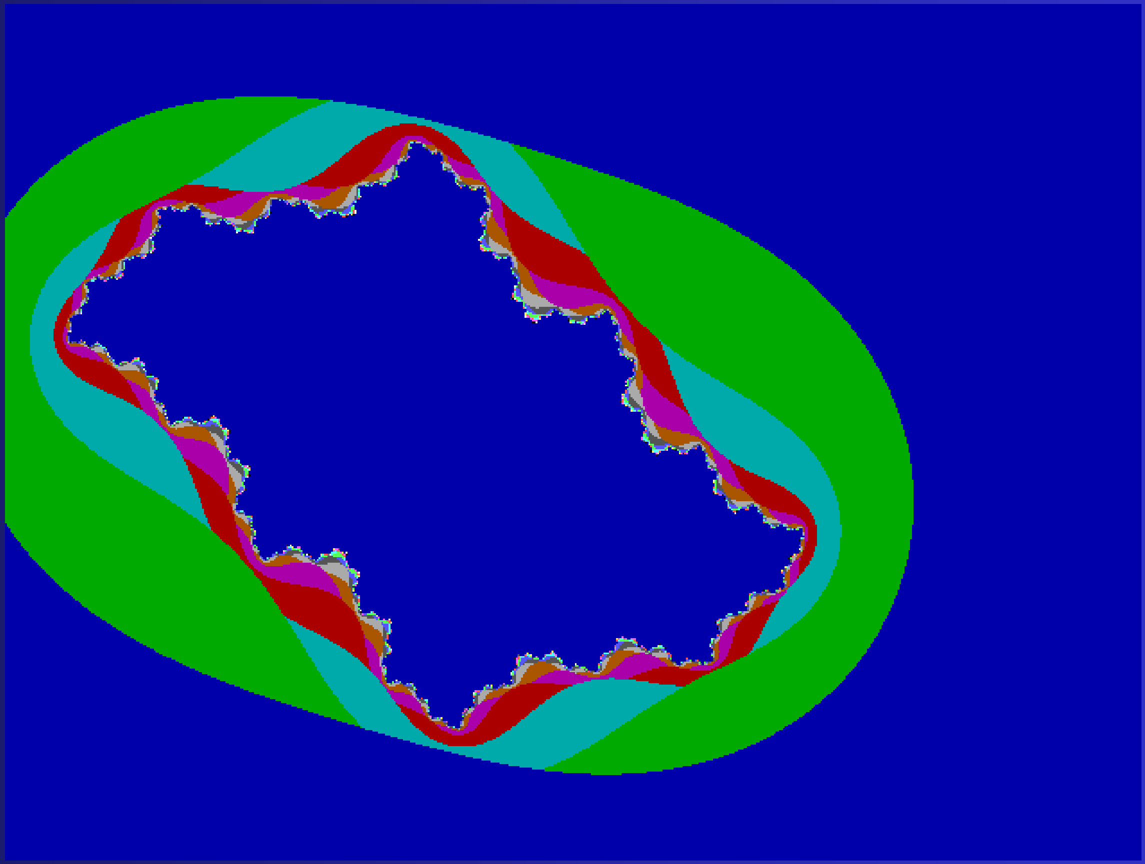
$$J(W) = Fr\{z \in \overline{C} \mid \lim_{n \to \infty} W_c^{\,n}(z) \to \infty\}.$$

- *Zbiorem Mandelbrota $M(W_c)$* nazywa się zbiór tych wartości parametru $c \in \overline{C}$, dla których zbiór Julii $J(W_c)$ wielomianu W_c jest zbiorem spójnym, czyli

$$M(W_c) = \{c \in \overline{C} : \lim_{n \to \infty} W_c^{\,n}(0) \not\longrightarrow \infty\}.$$

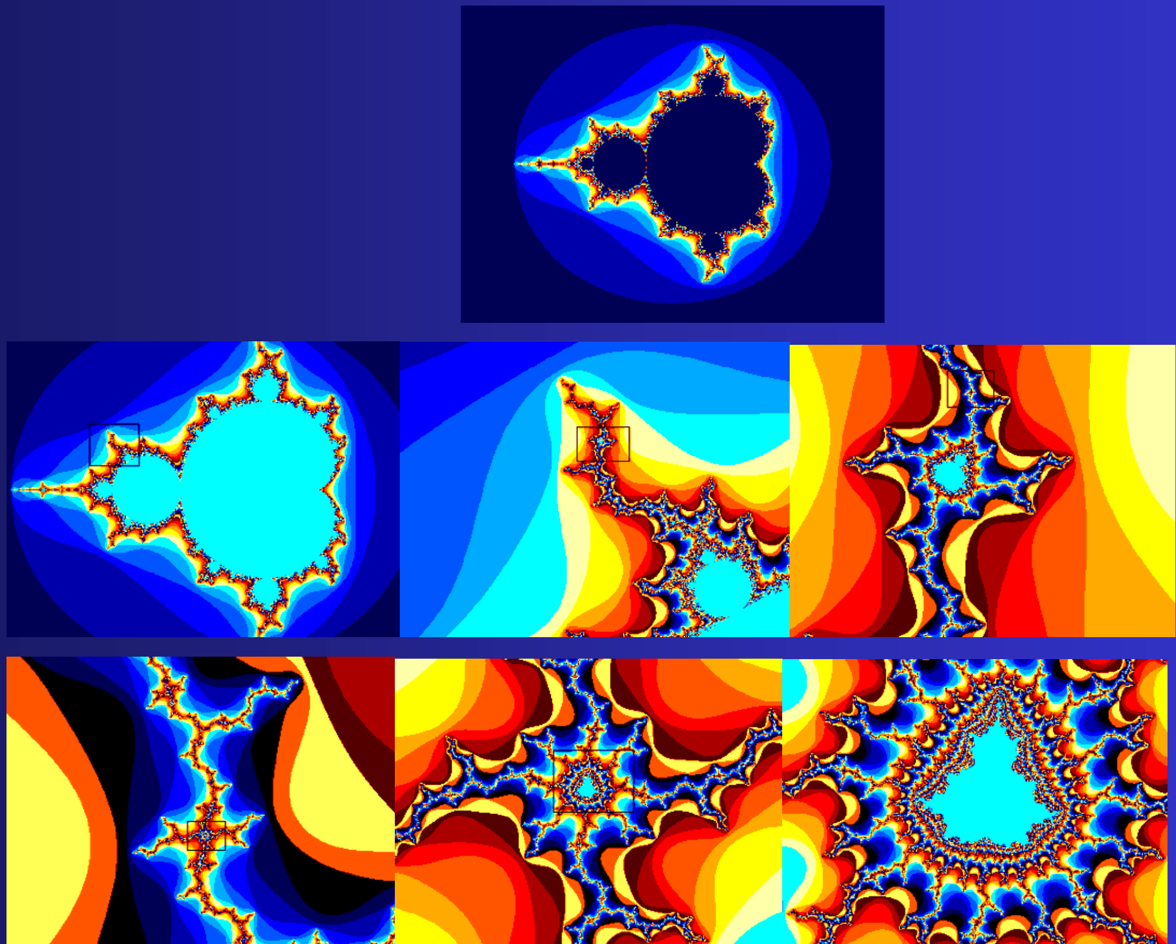
Zbiory Julii i Mandelbrota

Przykład wygenerowanego zbioru Julii.



Zbiory Julii i Mandelbrota

Zbiór Mandelbrota i jego kolejne powiększenia.

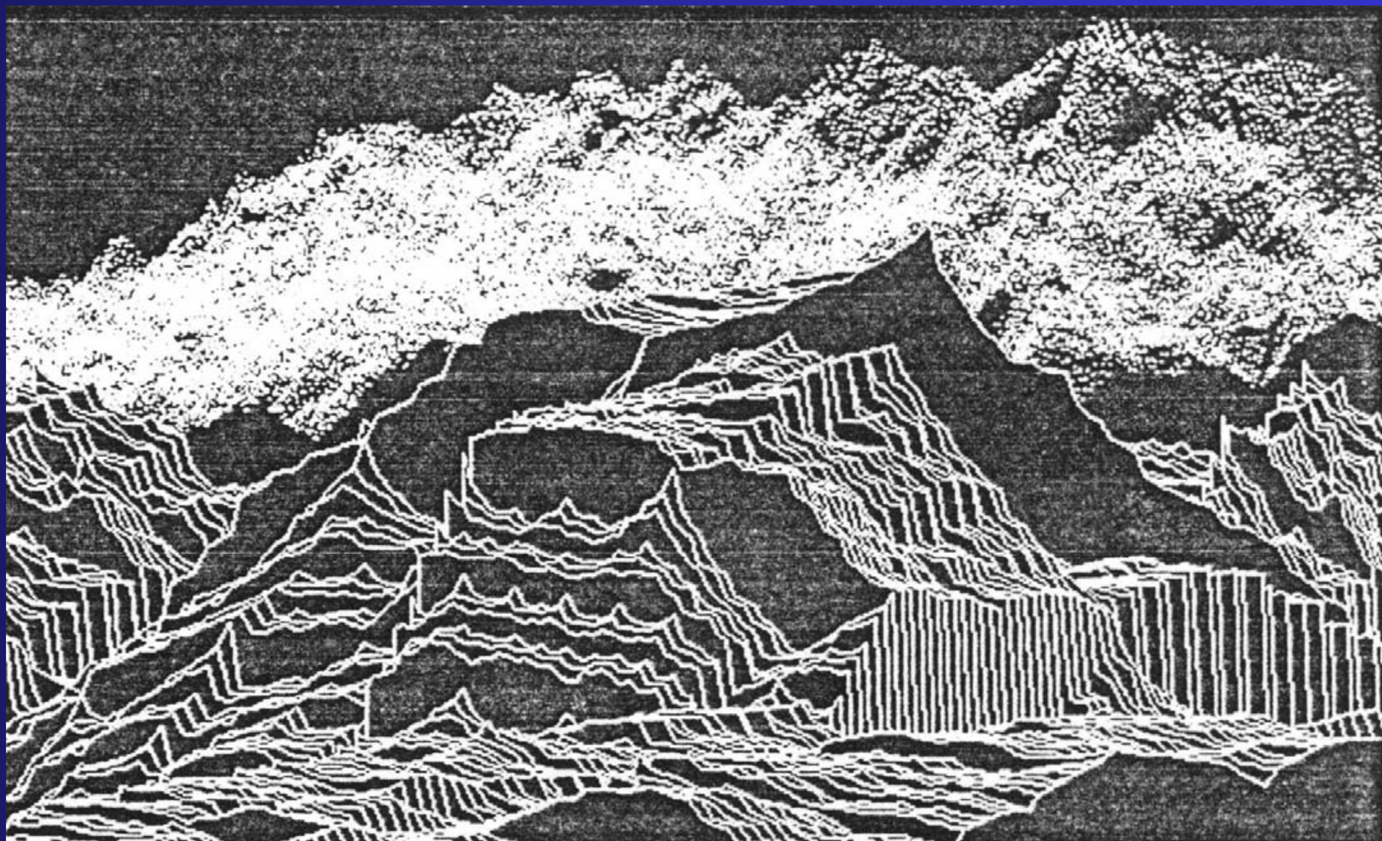


Ruchy Browna

- Teoria ta opracowana przez Roberta Browna w 1827 roku dotyczy chaotycznych ruchów atomów i cząsteczek.
- Fraktalna struktura ruchów mikroskopowych atomów może stanowić dogodne narzędzie do modelowania nieregularnych tworów makroskopowych, takich jak góry i chmury.

Ruchy Browna

Górski krajobraz – kompozycja gór i chmur uzyskanych przy użyciu algorytmu opartego o teorię Browna.



Wirtualna rzeczywistość

Fraktale są często wykorzystywane w grafice komputerowej to tworzenia bardzo realistycznych scen.

Wirtualna rzeczywistość

Źródło:

M.M. Weker, “Fraktale jako struktura rzeczywistości, www.psych.uw.edu.pl/~mardrog/nium/Fraktale-MWeker.htm.

M. Leśniak, “Fraktale”, www.psych.uw.edu.pl/~mardrog/nium/Fraktale-MLesniak.htm.

T. Martyn, “Fraktale i obiektowe algorytmy ich wizualizacji”, Wydawnictwo Nakom, Poznań, 1996.

W. Drab, J. Baran, “Fraktale”, www.ita.pwr.wroc.pl/Polish/Publication/Fraktale/fr.html.

“Świat fraktali”, www.mini.pw.edu.pl/MiNIwyklady/fraktale/strona.html

M. Mikler “Fraktale – praca semestralna z matematyki”, www.fraktale.core.pl/index3.htm.